Intersecciones de curvas proyectivas planas
Proyecto Pares Ordenados

Mentor: Ander Arriola   Aprendiz: Angee Natalia Grijalba

15 de diciembre de 2023

1. Resumen

El objetivo central de este proyecto se centra en la prueba y la comprensión del teorema de Bézout y su implicancia en el estudio de intersecciones de curvas proyectivas. El teorema de Bézout es un resultado fundamental en la geometría algebraica que establece relaciones precisas entre las intersecciones de curvas en el espacio proyectivo.

Para alcanzar este propósito, primero se abordará la esencia del teorema de Bézout, explorando sus conceptos y aplicaciones en el contexto de la geometría algebraica. En el transcurso de este proyecto, se introducirán los conceptos básicos de la geometría algebraica tales como variedades algebraicas, anillos de coordenadas e ideales, entre otros. A medida que avanzamos en la exploración de estos temas, se revelarán las herramientas necesarias para abordar con éxito el teorema de Bézout y sus implicaciones en el análisis de intersecciones de curvas proyectivas en la geometría algebraica.

Para desarrollar este proyecto se usará como texto gua principal el libro Algebraic curves de Willian Fulton [1].

.

2. Conjuntos algebraicos afines

Vamos a comenzar introduciendo la teoría necesaria para entender el teorema de Bézout

Sea k un cuerpo, entendemos por n-espacio afín $\mathbb{A}^n(k)$ como el producto cartesiano de k consigo mismo n veces. Las tuplas de $\mathbb{A}^n$ las llamaremos puntos. En particular $\mathbb{A}$ y $\mathbb{A}^2$ con conocidos como la línea afín y el plano afín respectivamente.

Definición 1. *Sea S un conjunto de polinomios en $k[X_1, ..., X_n]$, definimos*

$$V(S) = \{P \in \mathbb{A}^n | F(P) = 0 \text{ para todo } F \in S\}.$$

$S = \{F_1, ..., F_r\}$, usualmente escribimos $V(F_1, ..., F_r)$ en cambio $V(\{F_1, ..., F_r\})$.

Definición 2. *Un subconjunto $X \subseteq \mathbb{A}^n$ es un conjunto afín algebraico si $X = V(S)$ para algún S.*

Ejemplos. Sea $k = \mathbb{R}$

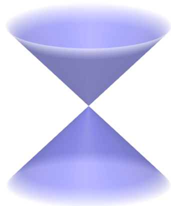

Figura 1: V($z^2 - (x^2 + y^2)$)

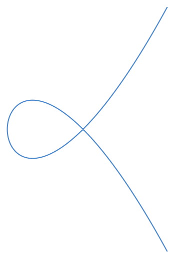

Figura 2: V($y^2 - x^2(x + 1)$)

Proposición 1. *Se tienen las siguientes propiedades:*

1. *Si I es el ideal en $k[X_1, ..., X_n]$ generado por S, entonces $V(S) = V(I)$, entonces todo conjunto algebraico es igual a $V(I)$ para algún ideal I.*

2. *Si $\{I_\alpha\}$ es una colección de ideales, entonces $V\left(\bigcup_\alpha I_\alpha\right) = \bigcap_\alpha V(I_\alpha)$.*

3. *Si $I \subset J$, entonces $V(J) \subset V(I)$.*

4. *$V(FG) = V(F) \cup V(G)$ para cualquier par de polinomios, entonces la unión finita de conjuntos algebraicos es un conjunto algebraico.*

5. *$V(\emptyset) = \mathbb{A}^n, V(1) = \emptyset, V(x_1 - a_1, ..., x_n - a_n) = \{a_1, ..., a_n\}$ para $a_i \in k$, entonces cualquier subconjunto finito de $\mathbb{A}^n$ es un conjunto algebraico.*

Definición 3. *Sea $X \subseteq A^n$, consideramos los polinomios que se anulan en X, estos forman un ideal en $k[X_1, ..., X_n]$, llamado el ideal de X, denotado $I(X)$*

$$I(X) = \{F \in k[X_1, ..., X_n] | F(a_1, ..., a_n) = 0 \textit{para todo } (a_1, ..., a_n) \in X\}.$$

Las siguientes propiedades muestran la relación que existe entre ideales y conjuntos algebraicos,

Proposición 2. *1. Si $X \subset Y$, entonces $I(Y) \subset I(X)$;*

2. *$I() = k[X_1, ..X_n]; I(\mathbb{A}^n(k) = (0)$ si k es un cuerpo finito ; $I(\{a_1, ..., a_n\}) = (X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$ con $a_1, ..., a_n \in k$.*
3. *$S \subset I(V(S))$ y $X \subset V(I(X))$;*
4. *$V(I(V(S))) = V(S)$ y $I(V(I(X))) = I(X)$. Si V es un conjunto algebraico $V = V(I(V))$ y si I es el ideal de un conjunto algebraico $I = I(V(I))$.*
5. *$I(X)$ es un ideal radical para cualquier $X \subset \mathbb{A}^n$*

De las definiciones anteriores se espera que V e I actúen como la "inversa de la otra ", sin embargo no siempre se tiene que $I(V(S)) = S$, el siguiente teorema nos da condiciones para que lo anterior suceda.

Teorema 1. *De los ceros de Hilbert. Sea I un ideal en $k[X_1, ..., X_n]$ (k algebraicamente cerrado). Entonces $I(V(I)) = Rad(I)$.*

De aquí tenemos que existe una relación biunívoca entre conjuntos algebraicos e ideales radicales.

$$\left\{ \text{Conjuntos algebraicos} \right\} \rightleftarrows \left\{ \text{Ideales radicales} \right\}$$

Definición 4. *Un conjunto algebraico $V \subseteq \mathbb{A}^n$ es irreducible si no es la unión de otros dos más pequeños. Un conjunto algebraico irreducible es llamado una variedad.*

Definición 5. *Sea $V \subset \mathbb{A}^n$ una variedad no vacía, definimos el anillo de coordenadas de V ,*

$$\Gamma(V) = k[X_1, ..., X_n]/I(V)$$

Como Ves irreducible, $I(V)$ es un ideal primo por tanto $\Gamma(V)$ es un dominio. que $\Gamma(V)$ es un dominio, podemos formar su cuerpo de fracciones, este cuerpo es llamado el cuerpo de funciones racionales en V y denotado $k(V)$

Definición 6. *Si f es una función racional en V , y $P \in V$, decimos que f esta definida en P si para $f = a/b$, con a y b sin factores comunes, $b(P) \neq 0$. Definimos $\mathscr{O}_P(V)$ Como el conjunto de funciones racionales en V que están definidas en P.*

Definición 7. *Sea F una curva plana, $P = (0, 0)$. Si escribimos a $F = F_m + F_{m+1} + \cdots + F_n$, donde cada F_i es un polinomio homogéneo en $k[x, y]$ de grado i y $F_m \neq 0$. Definimos a m como la multiplicidad de F en P $m_p(F)$*

Definición 8. *Un cambio afín de coordenadas en $\mathbb{A}^n$ es una función polinomial $T = (T_1, ..., T_m) : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$, donde cada T_i es un polinomio de grado 1 y T es una biyección. Ahora sea T una traslación que manda al (0,0) a $P = (a, b)$ y $T(x, y) = (a + x, y + b)$, entonces $(F \circ T)(X, Y) = F(X + a, Y + b)$ y podemos definir $m_P(F)$ como $m_{(0,0)}(F \circ T)$.*

3. Espacio proyectivo y variedades proyectivas

Definición 9. *Sea k un cuerpo. El n-espacio proyectivo sobre k denotado $\mathbb{P}^n(k)$ es el conjunto de todas las rectas que pasan por $(0,0,...,0) \in \mathbb{A}^{n+1}(k)$.*

En el plano dos rectas paralelas nunca se intersectan, por lo que en el plano proyectivo $\mathbb{P}^2$ añadimos un nuevo elemento de manera que dos rectas siempre se intersectan, si son paralelas se intersectan en este nuevo elemento " recta al infinito"

Cualquier punto $(x) = (x_1,..,x_{n+1}) \neq (0,0,...,0)$ determina una única recta , $\{\lambda(x_1,...,\lambda x_{n+1})|\lambda \in k\}$., decimos que dos puntos (x) y (y) determinan la misma recta si y solo si existe λ tal que $y_i = x_i$. Si un punto de $\mathbb{P}^n$ esta determinado por algún $(x_1,...,x_{n+1}) \in \mathbb{A}^n$ decimos que $(x_1,...,x_{n+1})$ son las coordenadas homogéneas de de P, escribimos $P = [x_1 : ... : x_{n+1}]$ para indicar que $(x_1,...,x_{n+1})$ son coordenadas homogéneas de P.

Definición 10. *Definimos*

$$U_i = \{[x_1 : ... : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : ... : x_{n+1}]\}.$$

Las coordenadas $(x_1,...,x_{i+1},x_{i+1},x_{n+1})$ son llamadas las coordenadas no homogéneas de P respecto a U_i. Ahora si consideramos la siguiente correspondencia,

$$\varphi_i : \mathbb{A}^n \to U_i$$
$$\varphi_i(a_1,...,a_n) = [a_1 : ... : a_{i-1} : 1 : a_{i+1} : ... : a_{n+1}]$$

Obtenemos una biyección entre los puntos de $\mathbb{A}^n$ y U_i. Note que $\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i$, entonces $\mathbb{P}^n$ es la unión de conjuntos que lucen como el n-espacio afín. Si definimos el siguiente conjunto

$$H_\infty = \{x_1 : ... : x_{n+1}|x_{n+1} = 0\}$$

conocido como el hiperplano al infinito, tenemos que $\mathbb{P}^n = U_i \cup H_\infty$ es la unión de un n-espacio afín y otro conjunto. En el caso del plano proyectivo $\mathbb{P}^2 = \mathbb{A}^2 \cup H_\infty$, donde H_∞ es la recta al infinito que se mencionó anteriormente.

Definición 11. *Un punto $P \in \mathbb{P}^n$ es un cero del polinomio $F \in k[X_1,...,X_{n+1}]$ si*

$$F(x_1,...,x_n) = 0$$

para cualquier elección de coordenadas homogéneas de $(x_1,...,x_{n+1})$ para P.

Definición 12. *Para cualquier conjunto S de polinomios en $K[X_1,...,X_{n+1}]$, sea*

$$V(S) = \{P \in \mathbb{P}^n|P \textit{ es un cero de cada } F \in S\}.$$

Observación. Si I es el ideal generado por S entonces $V(S) = V(I)$. Si $I = (F^{(1)},...,F^{(r)})$, donde $F^{(i)} = \sum F_j^{(i)}, F_j^(i)$ es una forma de grado j, entonces $V(I) = V(\{F_j^{(i)}\})$, entonces $V(S) = V(\{F_j^{(i)}\})$ es un conjunto de ceros un número finito de formas. Un conjunto de esa forma es llamado un conjunto algebraico proyectivo.

Definición 13. *Sea* $X \subset K[X_1, ..., X_{n+1}]$*, definimos*

$$I(X) = \{F \in k[X_1, ..., x_{n+1}] | \ todo \ P \in X \ es \ un \ cero \ de \ F\}$$

Es llamado el ideal de X*.*

Notación importante
Sea R un dominio. Si $F \in R[X_1, ..., X_{n+1}]$ es una forma definimos $F_* \in R[X_1, ...X_n]$,

$$F_* = F(X_1, ..., X_n, 1).$$

Por otro lado para cualquier polinomio $f \in R[X_1, ..., X_n]$ de grado d, escribimos a $f = f_0 + f_1 + ... + f_d$ donde cada f_i es una forma de grado i y definimos $f^* \in R[X_1, ..., X_{n+1}]$

$$f^* = X_{n+1}^d f_0 + X_{n+1}^{d1} f_1 + \ + f_d = X_{n+1}^d f(X_1/X_{n+1}, ..., X_n/X_{n+1})$$

f^* es una forma de grado d. Estos procesos son conocidos como “homogeneización” y “deshomogeneización” de polinomios respecto a X_{n+1}.

Definición 14. *Sea* V *un conjunto algebraico en* $\mathbb{A}^n$*,* $I = I(V) \subset k[X_1, ..., X_n]$*. Sea* I^* *el ideal en* $k[X_1, ..., X_n, X_{n+1}]$ *generado por* $\{F^* : F \in I\}$*,* I^* *es un ideal homogéneo. Sea* $V^*(I) = V(I^*) \subset \mathbb{P}^n$*.*

Definición 15. *Sea* V *una variedad proyectiva no vacía en* $\mathbb{P}^n$*. El anillo* $\Gamma_h(V) = k[X_1, ..., X_{n+1}]/I(V)$ *es un dominio, llamado el anillo de coordenadas homogéneas de* V*.*

Sea $k_h(V)$ el cuerpo cociente de $\Gamma_h(V)$; se le llama el cuerpo de funciones homogéneo de V. En contraste con el caso de variedades afines, ningún elemento de $\Gamma_h(V)$, excepto las constantes, determinan funciones en V; de manera similar, la mayoría de los elementos de $kh(V)$ no pueden considerarse como funciones. Sin embargo, si f y g son ambas formas en $\Gamma_h(V)$ del mismo grado d, entonces f/g define una función, al menos donde g no es cero: de hecho, $f(\lambda x)/g(\lambda x) = \lambda^d f(x)/\lambda^d g(x) = f(x)/g(x)$, por lo que el valor de f/g es independiente de la elección de coordenadas homogéneas.

El cuerpo de funciones de V, denotado como $k(V)$, se define como $\{z \in k_h(V) |$ para algunas formas $f, g \in \Gamma_h(V)$ del mismo grado, $z = f/g\}$. No es difícil verificar que $k(V)$ es un subcuerpo de $k_h(V)$, es decir, $k \subset k(V) \subset k_h(V)$, pero $\Gamma_h(V) \not\subseteq k(V)$. Los elementos de $k(V)$ se llaman funciones racionales en V.

Definición 16. *Dado* $P \in V$*,* $z \in k(V)$*, decimos que* z *está definido en* P *si* z *puede escribirse como* $z = f/g$*, con* f, g *formas del mismo grado, y* $g(P) \neq 0$*. Definimos*

$$\mathscr{O}_P(V) = \{z \in k(V) | z \ está \ definido \ en \ P\};$$

Teorema 2. *Sean* V *una variedad afín ,podemos identificar* $k(V)$ *con* $k(V^*)$ *y* $\mathscr{O}_p(V)$ *con* $\mathscr{O}_p(V^*)$*.*

Demostración. Existe isomorfismo natural $\alpha : k(V^*) \to k(V)$, $\alpha(f/g) = f_*/g_*$, donde g, f son polinomios homogéneos del mismo grado. Si $P \in V$ entonces α induce un isomorfismo entre $\mathscr{O}_p(V)$ y $\mathscr{O}_p(V^*)$.

4. Curvas planas proyectivas

Definición 17. *Supongamos que F es una curva proyectiva en el plano, y $P \in U_i$ ($i = 1, 2$ o 3). Podemos deshomogeneizar F con respecto a X_i y definir la multiplicidad de F en P, denotada como*

$$m_P(F) = m_P(F^*)$$

.

La multiplicidad es independiente de la elección de U_i y es invariante bajo cambio de coordenadas proyectivas.

Definición 18. *Sean F y G curvas proyectivas planas, el número de intersección $I(P, F \cap G)$ de las curvas G y F en el punto $P \in \mathbb{P}^2$ se define como,*

$$I(P, F \cap G) = dim_k(\mathscr{O}_P(\mathbb{P}^2)/(F_*, G_*)).$$

Este número tiene las siguientes propiedades:

1. *$I(P, F \cap G)$ es un entero no negativo para todo F, G y P tal que F y G se intersectan propiamente en P. $I(P, F \cap G) = \infty$ si F y G no se intersectan propiamente a P.*

2. *$I(P, F \cap G) = 0$ si y solo si $P \notin F \cup G$. $I(P, F \cap G)$ dependo solamente de las componentes de F y G que pasan por P y $I(P, F \cap G) = 0$ si F o G son constantes no negativas.*

3. *Si T es un cambio de coordenadas proyectivo en $\mathbb{P}^2$ y $T(Q) = P$ entonces $I(P, F \cap G) = I(Q, F^T \cap G^T)$.*

4. *$I(P, F \cap G) = I(P, G \cap F)$. Dos curvas F y G se intersectan transversalmente en P si P es un punto simple para ambas, y si la recta tangente de F a P es diferente a la recta tangente de G a P.*

5. *$I(P, F \cap G) \geq m_p(F)m_p(G)$. La igualdad ocurre si y solo si F y G no tienen rectas tangentes que pasan por P en común.*

6. *Si $F = \prod F_i^{r_i}$ y $G = \prod G_j^{s_j}$, entonces $I(P, F \cap G) = \sum_{i,j} I(P, F_i \cap G_j)$*

Esta propiedades determinan únicamente a $I(P, F \cup G)$.

Teorema 3 (Teorema de Bézout)**.** *Sean F y G curvas proyectivas planas de grado m y n respectivamente. Si F y G no tiene componentes en común entonces*

$$\sum_P = I(P, F \cap G) = mn$$

Corolario 1. *Si F y G no tiene componentes comunes ,entonces*

$$\sum m_P(F)m_P(G) < deg(F)deg(G).$$

Corolario 2. *Si F Y G se intersectan transversalmente en mn puntos distintos, con $m = deg(F), n = deg(G)$, entonces todos son puntos simples de F y G.*

Corolario 3. *Si dos curvas de grado m y n tiene más de mn puntos en común entonces tienen una componente en común.*

5. Teorema fundamental de Max Noether

Definición 19. *Un ciclo en $\mathbb{P}^2$ es una suma formal $\sum_{P\in\mathbb{P}^2} n_p P$ donde los n_P son número enteros.*

El conjunto de todos los ciclos en $\mathbb{P}^2$ es un grupo abeliano. El grado de un ciclo $\sum n_p P$ se define como $\sum n_P$. Decimos que $\sum n_p P$ es mayor que $\sum m_p P$ si $n_P > m_P$.

Definición 20. *Sea F, G curvas planas proyectivas de grado m, n respectivamente sin componentes en común. Se define el ciclo de intersección $F \cdot G$ como*

$$F \cdot G = \sum_{P\in\mathbb{P}^2} I(P, F \cap G).$$

El teorema de Bézout nos dice que $F \cdot G$ es un ciclo positivo de grado mn. Distintas propiedades del número de intersección se traducen fácilmente en propiedades del ciclo de intersección, como:

Proposición 3.

1. *$F \cdot G = G \cdot G$;*
2. *$F \cdot GH = F \cdot G + F \cdot H$;*
3. *$F \cdot (G + AF) = F \cdot G$ si A es un polinomio homogéneo (forma) y $deg(A) = deg(G) - deg(F)$.*

El Teorema de Max Noether se ocupa de la siguiente situación: Supongamos que F, G y H son curvas, y $H \cdot F \geq G \cdot F$, es decir, H interseca a F en un ciclo más grande que G. ¿Cuándo existe una curva B tal que $B \cdot F = H \cdot F - G \cdot F$? Observa que necesariamente $\deg(B) = \deg(H) - \deg(G)$.
Para encontrar dicha curva B, es suficiente encontrar formas A y B tales que $H = AF + BG$. Entonces, $H \cdot F = BG \cdot F = B \cdot F + G \cdot F$.
Sea $P \in P^2$, F, G curvas sin componentes comunes que pasan por P y H otra curva. Decimos que las condiciones de Noether son satisfechas en P si $H_* \in (F_*, G_*) \subset \mathscr{O}_P(\mathbb{P}^2)$ y esta es $a, b \in \mathscr{O}_P(\mathbb{P}^2)$ tales que $H_* = aF_* + bG_*$.

Teorema 4 (Teorema fundamental de Max Noether)**.** *Sean F, G, H curvas planas proyectivas, con F y G sin componentes comunes, entonces se cumple la siguiente ecuación*

$$H = AF + BG$$

con A y B polinomios homogeneos de grado $deg(H)deg(F)$ y $deg(H)deg(G)$ respectivamente, si las condiciones de Noether son satisfechas para todo punto $P \in F \cap G$.

Proposición 4.

Sean F, G, H curvas planas, $P \in F \cap G$. Las condiciones de Noether se satisface en los siguientes casos:

1. F y G se encuentran transversalmente en P y $P \in H$.

2. P es un punto simple en F, y $I(P, H \cap F) \geq I(P, G)$.

3. F y G tienen distintas tangentes en P, y $m_P(H) \geq m_P(F) + m_P(G) - 1$.

Corolario 4. *Si se cumple que*

1. *F y G se encuentran en deg(F)deg(G) distintos puntos, y H pasa por estos puntos, o*

2. *Todos los puntos de $F \cap G$ son puntos simples de F y $H \cdot F \geq G \cdot F$,*

entonces existe una curva B, tal que $B \cdot F = H \cdot F - G \cdot F$.

5.1. Aplicaciones

Proposición 5. *Sean C, C_0 cubicas y $C \cdot C_0 = \sum_{i=1}^{9} P_i$, Suponga que Q es una cónica y $Q \cdot C = \sum_{i=1}^{6} P_1$, si $P_1, .., P_6$ son puntos simples de C, P_7, P_8 y P_9 son colineales.*

Demostración. Sean F= $C, G = Q, H = C_0$ y aplicando (2) del corolario de la proposición 4.

Corolario 5 (Pascal)**.** *Si un hexagono esta inscrito e una cónica irreducible, entonces los lados opuestos se esncuentran en puntos colineales.*

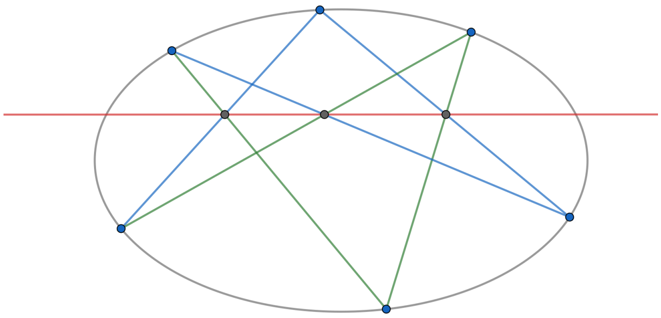

Figura 3: La parte azul y verde corresponden a una cubica respectivamente.

Referencias

[1] M. Atiyah. *Introduction To Commutative Algebra.* Addison-Wesley series in mathematics. Avalon Publishing, 1994.

[2] W. Fulton. *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry.* 2008.